

# **LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES DIFERENCIALES ASISTIDO CON MATHEMATICA 9.0: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA UN CURSO A NIVEL UNIVERSITARIO.**

Reiman Yitsak Acuña Chacón

reiacuna@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Tema: TIC y Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario-Universitario

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, resolución de problemas, didáctica, software educativo

## **Resumen**

*Se presenta la reseña de un proyecto de investigación que propone el uso del software Mathematica 9.0 como una alternativa didáctica para el estudio de los problemas que implican ecuaciones diferenciales a nivel de universidad. Se expone la introducción, teoría como metodología necesarias para abordar esta alternativa, así como las limitaciones encontradas en la propuesta.*

## **1. Introducción**

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales y el de los problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden en el curso MA1005 de la Universidad de Costa Rica, se ha llevado a cabo manera tradicional o expositiva por parte de los docentes de matemática. En este caso, a los y las estudiantes se les presentan una serie de fórmulas asociadas a cada problema y una descripción breve en su interpretación que, por efectos de tiempo, no permiten el análisis y modelación pertinentes para su entendimiento.

Ante esta situación, se genera la necesidad de plantear una propuesta didáctica que permita el análisis y el estudio íntegro de los problemas con ecuaciones diferenciales, desde la perspectiva de la resolución de problemas y con la ayuda de las tecnologías de la información, en tal caso, el uso de Mathematica 9.0, dado que la Escuela de Matemática cuenta con una licencia del programa en sus laboratorios.

## **2. Marco Teórico**

### **La resolución de problemas en Ecuaciones Diferenciales**

De acuerdo con Cruz (2006), la resolución de problemas constituye un verdadero dilema para la enseñanza de la Matemática. Cuando se habla de problemas no debe referirse a la versión trivializada de los ejercicios con texto. Por el contrario, aquí el

término se refiere a situaciones verdaderamente complejas, capaces de potenciar el desarrollo del pensamiento, y de proporcionar modos de actuación para enfrentar los retos de la ciencia y la técnica. En el caso de las Ecuaciones diferenciales, y siguiendo las ideas de Zill (2005), es necesario considerar las siguientes pautas en la resolución de problemas: a) Determinar la situación problemática, b) formular el problema, c) hacer la modelación, d) dar la solución, e) realizar la interpretación y volver a la situación problemática.

### **Mathematica 9 y las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden**

De acuerdo con Abell y Braselton (2004), Mathematica es un software educativo que permite la manipulación de datos, información y expresiones matemáticas para derivarlos en resultados necesarios. Para su utilización, es necesario conocer los comandos básicos y tener claro lo que se desea determinar. Su licencia es privativa por lo que su uso es delimitado.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales, Mathematica soporta el problema general de búsqueda de solución de una ecuación diferencial como la resolución de un problema con valores iniciales. Cuando se resuelve una ecuación diferencial sin especificar ninguna condición inicial, la solución del problema no es única, sino que existe una familia de posibles soluciones que difieren en unas constantes de integración. Sin embargo, cuando se dan las condiciones iniciales ( $n$  condiciones para una ecuación diferencial de orden  $n$ ), puede ser única y no depende de coeficientes indeterminados. (de Guzmán, 1975)

En tal caso, la siguiente instrucción proporciona la solución de una ecuación diferencial para la función  $y$ , con la variable independiente  $x$ .

$$\text{DSolve}[\text{ecuación}, y[x], x]$$

Mientras que la siguiente instrucción brinda la solución de una ecuación diferencial para un problema con valores iniciales:

$$\text{DSolve}[\{\text{ecuación}, \text{condición 1}, \text{condición 2}, \dots\}, y[x], x]$$

Es importante advertir que después de cada entrada (“In”) se tecléa “Shift+Enter” para obtener los resultados respectivos (“Out”)

*Ejemplo:* Se introduce un fármaco en el torrente sanguíneo en dosis  $R(t)$  y se remueve a una velocidad proporcional a la concentración  $C(t)$ . Luego, la concentración  $C(t)$  en el tiempo  $t$  (horas) está dada por

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = R(t) - kC \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Donde  $k > 0$  es la constante de proporcionalidad. Calcule y grafique  $C(t)$  en el intervalo  $[0,30]$  si  $k = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$  y  $0.25$  y  $R(t) = e^{-t}$ . Realice un análisis al respecto sobre  $k$ .

*Solución:* Se debe notar que la solución general de ecuación diferencial asociada a este problema está dada por

$$\text{In}[1] := \text{DSolve}\{C'[t] == e^{-t} - k * C[t], C[0] == 0\}, C[t], t]$$

$$\text{Out}[1] = \left\{ \left\{ C[t] \rightarrow \frac{e^{-kt}(-1 + e^{(-1+k)t})}{-1 + k} \right\} \right\}$$

Luego, se detalla la instrucción

$$\text{In}[2] := \text{sol}[k\_ , t\_ ] := \text{DSolve}\{C'[t] == e^{-t} - k * C[t], C[0] == 0\}, C[t], t][[1,1,2]]$$

Para que en la memoria quede guardada solo la expresión

$$\frac{e^{-kt}(-1 + e^{(-1+k)t})}{-1 + k}$$

Que representa la solución general de la ecuación diferencial. En este caso no se obtiene una salida si se teclea “Shift+Enter”.

Por último, se digita la instrucción

$$\begin{aligned} \text{In}[3] := & \text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[\text{sol}[k, t], \{k, 0.05, 0.25, 0.05\}], \{t, 0, 30\}, \text{Frame} \rightarrow \\ & \text{False}, \text{AxesLabel} \rightarrow \\ & \{\text{Style}["x", \text{Bold}, \text{Italic}, \text{Large}], \text{Style}["y", \text{Bold}, \text{Italic}, \text{Large}]\}, \text{AxesStyle} \rightarrow \\ & \{\text{Arrowheads}[\{-0.04, 0.04\}], \text{FontSize} \rightarrow 12\}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{LabelStyle} \rightarrow \\ & \text{Directive}[\text{Bold}, 12, \text{Italic}], \text{PlotLegends} \rightarrow \text{Placed}[\text{SwatchLegend}[\text{Table}[\text{Row}["k = \end{aligned}$$

", C}], {C, 0.05, 0.25, 0.05}], LegendMarkers → "Line", LegendFunction →  
"Frame", LegendLayout → "Column", LegendLabel →  
"Valores para k", {{1, 0.25}, {-0.1, 0.1}}]]

Para obtener la figura 1 como parte del Out[3]

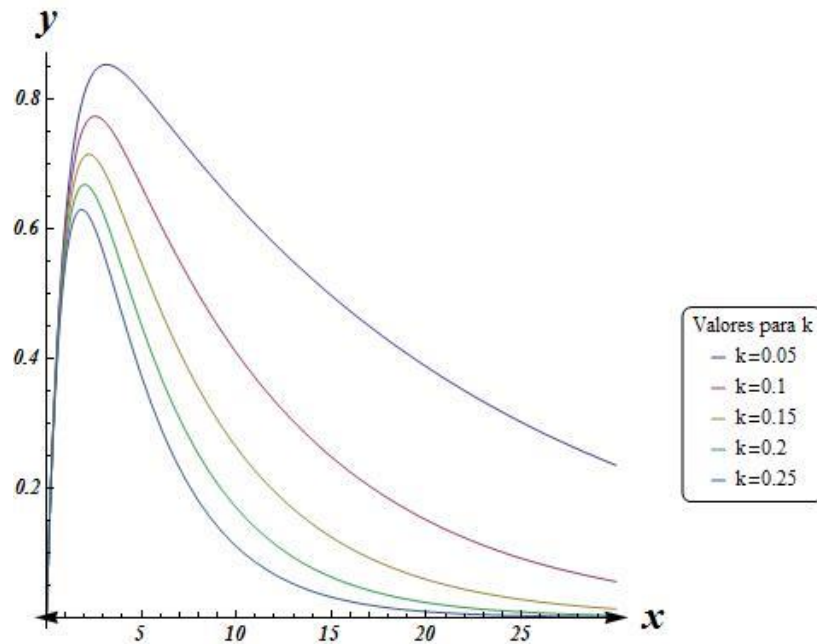


Figura 1: Concentración del fármaco en la sangre con diferentes proporciones

Fuente: Elaboración propia con Mathematica 9

Se puede concluir que entre mayor sea el valor de  $k$ , la concentración del fármaco es menos efectiva y menor es el tiempo en que se alcanza la máxima concentración, debido al aumento de la rapidez con que se extrae el fármaco. (Agarwal y O'Regan, 2008)

### 3. Metodología

#### 3.1. Tipo de Investigación

La investigación ha desarrollar corresponde a una investigación en el área de la matemática educativa, que combina el enfoque cuantitativo con el cualitativo. En el enfoque cuantitativo puede ubicarse como una investigación de tipo exploratorio, que combina técnicas de medición propias de ese enfoque, con técnicas de recolección de datos de tipo cualitativo. Consecuentemente, en la investigación se implementará una metodología de tipo mixto.

### **3.2. Sujetos e información**

Los sujetos de esta investigación serán los y las estudiantes del curso MA1005: Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería de la Universidad de Costa Rica de la Sede Rodrigo Facio, en la provincia de San José.

La selección de los participantes se realizará mediante una técnica de muestreo no probabilística denominada "muestreo por conveniencia" que, según Mc Millan (2005), consiste en seleccionar un conjunto de sujetos sobre la base de ser accesibles o adecuados. Esta modalidad de muestreo se justifica por cuanto la investigación requiere de la disposición de la universidad de participar en el proyecto, y no solo de los y las estudiantes en su carácter individual.

De esta forma, se determinarán dos grupos: uno experimental y otro de control. En ambos se aplicarán las evaluaciones y observaciones necesarias para compararlas con el experimental, donde se aplicará la propuesta.

Por otro lado, la información para crear la propuesta y desarrollar la misma corresponde a un compendio bibliográfico que comprende las referencias bibliográficas.

### **3.3. Descripción e implementación de la propuesta**

La propuesta didáctica planteada consiste en la realización de un módulo de enseñanza. De acuerdo con Yukavetsky (2003) se trata de un material didáctico para el educando, abordado de manera escrita o tecnológica, donde el docente facilita algunos componentes instructivos para que el estudiante desarrolle unos aprendizajes específicos en torno a cierto contenido, en tal caso, la resolución de problemas que involucran las ecuaciones diferenciales de primer orden (problemas de crecimiento y decrecimiento de poblaciones, problemas asociados con mezclas y reacciones químicas, problemas asociados con leyes del movimiento de newton, problemas asociados con la ley del enfriamiento de newton, problemas asociados con tanques interconectados, problemas asociados con circuitos eléctricos)

En este caso, el módulo de enseñanza se caracteriza por tener: a) Tema de estudio, b) Objetivos, c) Contenido, d) Dinámicas de enseñanza y aprendizaje, e) Recursos, f) Evaluación.

Los y las estudiantes del grupo experimental dispondrán de los módulos de enseñanza y al final de cada módulo tendrán una evaluación y cuestionario respectivo que permita valorar la viabilidad de la propuesta.

#### **4. Limitaciones de la propuesta**

Entre las limitaciones que se encontraron para esta esta propuesta se detallan:

1. Tiempo agregado al curso para que los y las estudiantes obtengan conocimientos previos en el manejo del programa.
2. Instalación del programa, con el permiso de la Universidad, para que cada estudiante del curso proceda a implementarlo en el hogar, suponiendo que posee un computador con el sistema operativo Windows XP (o versiones más recientes)
3. Variedad de ejemplos que implementen la resolución de problemas y permitan un estudio más detallado con el programa.

En cualquiera de estos tres, casos el docente debe velar por planear bien sus clases. Para los profesores de la Universidad de Costa Rica, se les ha recomendado el uso de los laboratorios de cómputo e implementar asistentes para colaborar con las dudas de los jóvenes. De igual forma, se ha solicitado evaluar el análisis de los problemas y las conclusiones a las que llegan los y las estudiantes, más allá del dominio del programa, pues es solo una herramienta.

#### **Referencias bibliográficas**

- Abell, M. y Braselton, J. (2004) *Differential Equations with Mathematica*. New York: Academic Press.
- Agarwal, R., y O'Regan, D. (2008). *An introduction to ordinary differential equations*. New York: Springer.
- Cruz, M. (2006) *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.
- de Guzman, M. (1975). *Ecuaciones diferenciales ordinarias: Teoría de estabilidad y control*. Madrid: Alhambra.

McMillan, J., y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Editorial Pearson.

Yukavetsky, G. (2003). *La elaboración de un módulo instruccional*.  
[http://www1.uprh.edu/ccc/CCC/La%20elaboracion%20de%20un%20modulo%20instruccional/CCC\\_LEDUMI.pdf](http://www1.uprh.edu/ccc/CCC/La%20elaboracion%20de%20un%20modulo%20instruccional/CCC_LEDUMI.pdf). Consultado 22/07/2013

Zill, D. (2005). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México D.F.: C. Learning.